Ministerul Educației și Cercetării

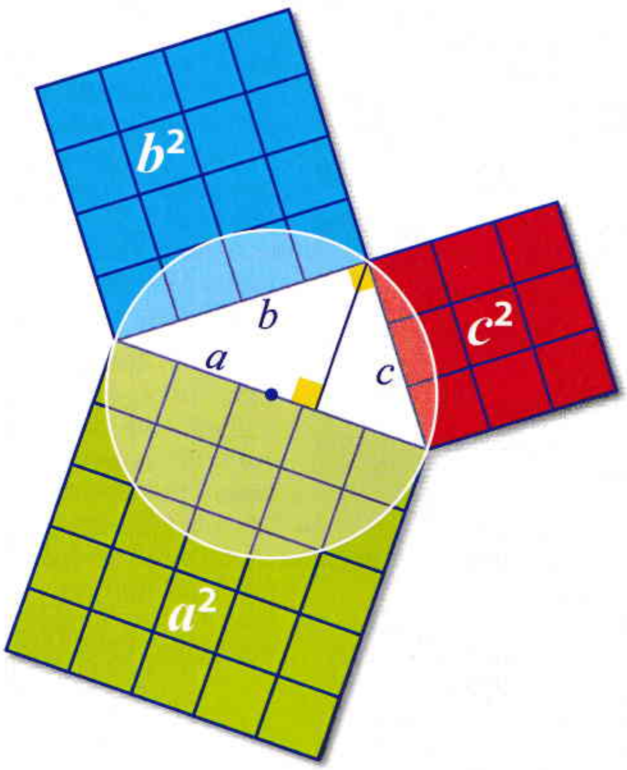
Mihaela Singer Sorin Borodi Vlad Copil Emilia Iancu

Maria Popescu Vicențiu Rusu Cristian Voica

Übersetzer: Carmen Reich-Sander, Bianca Avram, Elena Proșac, Radu George Crețulescu

MATHEMATIK

Lehrbuch für die 7. Klasse



SIGMA

București, 2024

Inhalt

Allgemeine Kompetenzen
Spezifische Kompetenzen

- **A.K. 1. Erkennen von Daten, Größen und mathematischen Beziehungen in verschiedene Kontexte**

Erkennen der Zahlen die zu den verschiedenen Teilmengen von R gehören. Erkennen von Aufgaben in Lebenssituationen die mithilfe von linearen Gleichungen oder Gleichungssystemen gelöst werden. Erkennen von Informationen aus Tabellen, Grafiken und Diagrammen. Erkennen der besonderen Vierecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der Elemente des Kreises und/oder die der regelmäßigen Vielecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der ähnlichen Dreiecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks in geometrischen Kontexten.

- **A.K. 2. Bearbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen Daten aus verschiedenen Informationsquellen.**

Anwenden der Rechenregeln zum Schätzen und Approximieren von reellen Zahlen. Anwenden der Rechenregeln mit reellen Zahlen zur Überprüfung der Lösungen von Gleichungen oder von linearen Gleichungssystemen. Verarbeitung von Daten in Form von Tabellen, Grafiken oder Diagrammen im Sinne ihrer Registrierung, Ermittlung und Visualisierung. Das Beschreiben der Vierecke anhand ihrer Definitionen und Eigenschaften in vorgegebenen geometrischen Konfigurationen. Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke, die einem Kreis einbeschrieben sind. Ähnlichkeitssätze der Dreiecke. Anwenden der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und Bestimmen der wichtigen Linien.

- **A.K. 3. Verwendung spezifischer Konzepte und Algorithmen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten**

Verwendung von Algorithmen und Eigenschaften von Operationen zur Durchführung von Rechnungen mit reellen Zahlen. Verwendung äquivalenter Schreibweisen beim Lösen einiger Gleichungen und linearer Gleichungssysteme. Auswahl der geeigneten Darstellungsmethode für die Aufgaben, in denen funktionale Abhängigkeiten und ihre Darstellungen vorkommen. Lösen der Aufgaben mithilfe der Eigenschaften von Vierecken. Lösen der Aufgaben mithilfe der Eigenschaften des Kreises. Bestimmen von Längen, Winkelmaßen und Flächen mithilfe der Eigenschaften der ähnlichen Dreiecke. Beweisen der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck.

- **A.K. 4. Verwenden der mathematischen fachspezifischen Sprache für Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungen in gegebenen Situationen**

Verwenden der Fachsprache bezüglich der reellen Zahlen (Vorzeichen, absoluter Betrag, entgegengesetztes Element, Umkehrelement). Schreiben der Lösung von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen. Verwenden der mathematischen Fachbegriffe für die Datenverarbeitung. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Vierecke. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Eigenschaften des Kreises und der Vielecke. Verwenden der Ähnlichkeit spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Eigenschaften von geometrischen Figuren. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks

- **A.K. 5. Analyse der mathematischen Eigenschaften einer gegebenen Situation**

Strategien entwickeln, um Aufgaben mit reellen Zahlen zu lösen. Methoden zur Lösung von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen bestimmen. Analyse praktischer Situationen mithilfe der Datenverarbeitung. Auswahl der geeigneten geometrischen Darstellungen zur Optimierung der Berechnung von Streckenlängen, Winkelmaßen und Flächen. Erklären der Eigenschaften des regelmäßigen Kreises und der Vielecke anhand geometrischer Darstellungen. Interpretation der Ähnlichkeit von Dreiecken anhand geometrischer Darstellungen. Interpretation der metrischen Beziehungen zwischen den Elementen im rechtwinkligen Dreieck.

- **A.K. 6. Mathematische Modellierung einer gegebenen Situation durch Integration von Informationen aus verschiedenen Bereichen**

Mathematische Modellierung praktischer Beispiele, die Operationen mit reellen Zahlen enthalten. Verwendung von Gleichungen und / oder linearen Gleichungssystemen praktischen Beispielen. Umsetzung einer gegebenen Situation in eine entsprechende mathematische Darstellung (Text, Formel, Diagramm, Grafik). Verwenden der Vielecke bei geometrischen Darstellungen für die Modellierung bestimmter praktischer Beispiele. Mathematische Modellierung von praktischen Situationen mithilfe der regelmäßigen Vielecke oder Kreise. Verwenden der Ähnlichkeit der Dreiecke in praktischen Beispielen. Verwenden der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck in praktischen Beispielen.

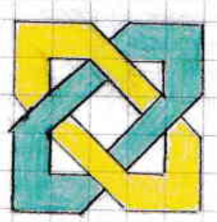
Projekt: Algebra und Geometrie im quadratischen Raster

Anleitungen

✔ **Notwendige Materialien:** Blätter aus dem Matheheft, Lineal, Buntstifte.
✔ **Ziel:** Ihr werdet mithilfe von Strecken mit gegebenen Längen interessante Figuren zeichnen und die Längen anderer Strecken bestimmen.

Durchführung

Arbeitet in Dreier -, Vierer- oder Fünfergruppen!

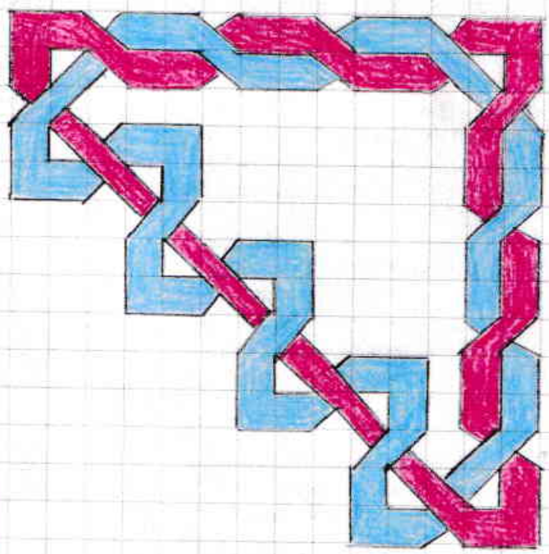


✔ Zeichnet bunte „Geflechte" wie jene in den dargestellten Modellen.

✔ Füllt für jedes Modell ein Arbeitsblatt mit :
- Der Länge eines jeden „Kettengliedes" (gebrochene geschlossene Linie);
- Einem günstigen Näherungswert der Länge;
- Rechenanleitungen.

✔ Verwendet für euer Projekt die mit bezeichneten Aufgaben. Dort findet ihr neue Methoden zum Berechnen von Streckenlängen. Benützt in euren Modellen Strecken mit Längen, die ihr in diesen Aufgaben berechnet.

✔ Erstellt ein Poster mit allen Materialien.



Zu Beginn:

✔ Übertragt die nebenan dargestellte Figur in euer Heft (Beachtet die Einzelheiten).

✔ Berechnet die Gesamtlänge der horizontalen und vertikalen Strecken, die die rote „Kette" begrenzen.

Gruppenarbeit

In der Gruppe:

✔ Besprecht die Etappen des Projekts und verteilt die Aufgaben.
✔ Jeder erledigt seinen Auftrag, hilft aber auch den anderen, damit die Gruppe ein gutes Endprodukt erzeugt.
✔ Diskutiert und beschließt, wie euer Poster zum Schluss aussehen soll.

Präsentation

Die ganze Klasse arbeitet mit!

✔ Stellt die Poster aus.
✔ Jede Gruppe bewertet die Poster der anderen Gruppen.
- Stimmt ab, welches Poster euch am besten gefallen hat.
- Achtung! Keine Gruppe darf für ihr eigenes Poster abstimmen.

✔ Zählt die Punkte zusammen und bestimmt die Siegergruppe .

Einstufungstest

Arbeitszeit: 50 Minuten

Beim Lösen folgender Aufgaben erinnerst du dich an Begriffe, die in dieser Lerneinheit notwendig sind. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhältst du einen Punkt. 1 Punkt von Amts wegen.

I. *Schreibe nur die die fehlenden Wörter, sodass wahre Aussagen entstehen.*

Maßeinheiten; Umwandlungen

1. Ergänze!

a) 3,4 m = ... cm; **b)** 250 dm^2 = ... m^2.

Operationen mit rationalen Zahlen

2. Berechne:

a) $1{,}2 + 3{,}56 = ...$; **b)** $2{,}4 \times 0{,}6 = ...$; **c)** $8{,}25 : 1{,}5$; **d)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = ...$;

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$; **f)** $\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$; **g)** $3009 - 109 = ...$; **h)** $5 \cdot (-7) = ...$.

Primzahlen

3. Der Wahrheitswert der Aussage *„Die folgenden Zahlen sind alle Primzahlen: 13; 23; 43; 53; 73; 83."* ist ...

II. *Schreibe den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht auf dein Lösungsblatt.*

Vergleichen der rationalen Zahlen

4. Die größte der Zahlen −3,45; 2,2(32); 1; −12; 2,233 ist:

A. −12; **B.** 2,233; **C.** 2,2(32); **D.** −3,45.

Teilbarkeit

5. Die Einerziffer, die in das Kästchen □ geschrieben werden muss, damit die Zahl $\overline{402\square}$ durch 9 teilbar ist, ist:

A. 10; **B.** 9; **C.** 8; **D.** 3.

Methoden zum Lösen von Aufgaben

6. Geo denkt sich eine Zahl aus. Er multipliziert sie mit 3 und addiert zum Produkt 5. Er erhält 13,16. Die von Geo gewählte Zahl ist:

A. 2,64; **B.** 3,72; **C.** 2,72; **D.** 6,02.

III. *Schreibe die vollständigen Lösungen der folgenden Aufgaben auf dein Lösungsblatt.*

Flächeninhalte

7. Berechne den Flächeninhalt der bunten Figur. Als Maßeinheit gilt ein Kästchen des Rasters. Löse auf zwei Arten:

a) Finde die Anzahl der Kästchen in der Figur;

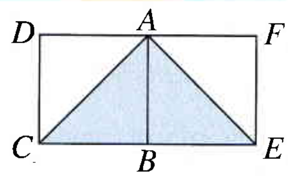
b) Zähle alle Kästchen außerhalb der Figur.

Eigenschaften der Dreiecke

8. $ABCD$ und $ABEF$ sind Quadrate.

a) Zeige, dass die Dreiecke ABC und ADC kongruent sind.

b) Beweise, dass das Dreieck ACE rechtwinklig und gleichschenklig ist.



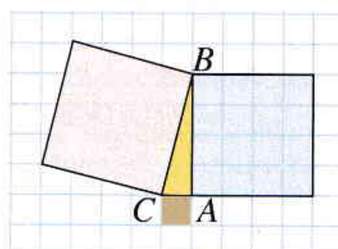
Lehrsatz des Pythagoras

9. Auf ein Matheblatt wurden das rechtwinklige Dreieck ABC und drei Quadrate, wie in der Figur nebenan, gezeichnet.

a) Berechne die Flächeninhalte der Quadrate, mit den Seiten den Katheten AB und AC, wenn die Seite eines Kästchens 0,5 cm ist.

b) Berechne den Flächeninhalt des Quadrates mit einer Seite BC.

c) Schreibe eine Beziehung zwischen den Flächen von **a)** und **b)**.



Falls du weniger als die Hälfte der Punkte erreicht hast, solltest du die Definitionen und Eigenschaften der obigen Begriffe wiederholen und festigen. Nur so kannst du die neuen Begriffe, die folgen, verstehen.

Natürliche Zahlen; rationale Zahlen; Zerlegen der Zahlen

Problemsituation

Matei hat Bücher verschiedener Dicke: 1,8 cm oder 2,5 cm oder 2 cm. Er möchte ein Regal mit drei Brettern bauen und in jede Reihe nur Bücher derselben Dicke stellen. Welche ist die kürzeste Länge eines Brettes, wenn alle drei Bretter voll sein sollen? Wie viele Bücher sind dann in jeder Reihe?

Lösung:
Die Dicke der Bücher in Millimeter ist: 18, 25 und 20. Die Länge eines Brettes muss ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches sein, also $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.
Das heißt 900 mm $= 90$ cm.
Die Anzahl der Bücher pro Brett ist:
$900 : 18 = 50$ (mit der Dicke 1,8 cm)
$900 : 25 = 36$ (mit der Dicke 2,5 cm)
$900 : 20 = 45$ (mit der Dicke 2 cm).

Wir lernen Welche Schreibweise der rationalen Zahlen ist zum Lösen der Aufgaben günstiger?

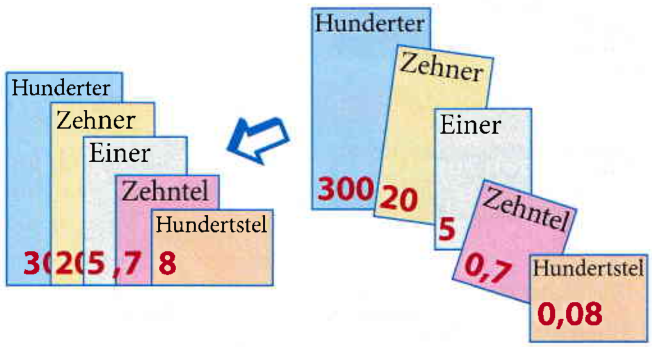
Wir erinnern uns ...

- Natürliche Zahlen und Dezimalzahlen werden in der Zehnerbasis mithilfe der Ziffern 0, 1, ... , 9 geschrieben.

  Beispiel: In der Zahl 325,78 gibt die Ziffer 2 die Anzahl der Zehner an und die 8 die Anzahl der Hundertstel. 325,78 ist eigentlich:

  $325{,}78 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$,

  wobei $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$ und $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$.



  Die obere Summe ist die Schreibweise der Zahl 325,78 in der Basis 10, die Zerlegung der Zahl als ***Summe*** von Potenzen von 10.

  Beispiel: $20\,015{,}038 = 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} =$
  $= 20\,000 + 10 + 5 + 0{,}03 + 0{,}008$

- Jede natürliche Zahl kann als ***Produkt*** von Primzahlen geschrieben werden.

  Beispiele: $234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$
  $468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$
  $3072 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^{10} \cdot 3$

234	2
117	3
39	3
13	13
1	

- Rationale Zahlen kann man mithilfe des Kommas (als Dezimalzahl) oder des Bruchstriches (als Bruch) darstellen.

  Beispiele:
  – Endliche Dezimalzahlen: $0{,}7 = \dfrac{7}{10}$, $2{,}75 = 2 + \dfrac{75}{100} = \dfrac{275^{(25}}{100} = \dfrac{11}{4}$
  – Reinperiodische Dezimalzahlen: $0{,}(1) = \dfrac{1}{9}$, $1{,}(34) = 1\dfrac{34}{99} = \dfrac{133}{99}$ oder $1{,}(34) = \dfrac{134-1}{99} = \dfrac{133}{99}$
  – Gemischtperiodische Dezimalzahlen: $0{,}4(1) = \dfrac{41-4}{90} = \dfrac{37}{90}$, $2{,}3(16) = 2\dfrac{316-3}{990} = 2\dfrac{313}{990} = \dfrac{2293}{990}$.

Mündliche Übung Nenne die Regeln zum Umwandeln für jede Situation.

Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen

Stelle fest, wie viele natürliche Teiler 24 hat.

Geo, Anna und Lisa haben die Aufgabe verschiedenartig gelöst.

Geo:
Ich schrieb alle Zahlen von 1 bis 24 und die Teiler von 24 unterstrich ich.
$\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\underline{4}$ 5 $\underline{6}$ 7 $\underline{8}$ 9
10 11 $\underline{12}$ 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 $\underline{24}$.
Also hat 24 genau 8 Teiler.

Anna:
Ich habe mit dem kleinsten Teiler von 24 begonnen und dann gleich den Quotienten der Division von 24 durch ihn aufgeschrieben:
1 und 24; 2 und 12;
3 und 8; 4 und 6.
Also hat 24 genau 8 Teiler.

Lisa:
Ich habe 24 in Primfaktoren zerlegt: $24 = 2^3 \cdot 3$.
Jeder Teiler von 24 hat die Form: $2^a \cdot 3^b$, wobei $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$.
Weil a 4 Werte annehmen kann und b 2 Werte, gibt es für $2^a \cdot 3^b$ genau 8 Werte.
Deshalb hat 24 genau 8 Teiler.

Mündliche Übung Welche Lösung ist die schnellste? Und die interessanteste? Begründe!

Aufgaben

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen von 10 bis 30 und unterstreiche die Primzahlen.

2. Hole die Ganzen aus den Brüchen heraus: $\frac{15}{7}$; $\frac{20}{3}$; $\frac{31}{5}$.

3. a) Schreibe die rationalen Zahlen in Dezimalform: $\frac{5}{4}$; $\frac{14}{3}$; $\frac{23}{12}$

b) Schreibe die rationalen Zahlen als Bruch: 2,35; 4,(6); 1,2(4).

4. Schreibe jede der folgenden Zahlen zwischen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen $\frac{24}{7}$; $\frac{42}{5}$; $-5{,}23$; 13,85. *Beispiel*: $-4 < \mathbf{-3{,}86} < -3$.

5. Schreibe die folgenden Zahlen als Produkt von Primfaktoren: 63; 630; 6300.

6. Schreibe die folgenden Zahlen als Summe von Potenzen von 10, wie im Beispiel 2853; 308; 41,5; 28,06; 3,619; 43,28.

Beispiel: $\mathbf{375} = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$;
$\mathbf{42{,}96} = 4 \cdot 10 + 2 + 9 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

7. Mati hat die Zahl 1050 als Produkt von Primfaktoren geschrieben.

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Verwende Matis Gleichung und zerlege die Zahlen: 10500; 2100; 3150 in Primfaktoren.

8. Wir schreiben 3,45 wie folgt:

$$3{,}45 = 3 + 0{,}45.$$

In dieser Schreibweise ist 3 der *ganze Teil*, und 0,45 der *gebrochene Teil* der Zahl 3,45.
Zerlege auf die gleiche Weise $\frac{15}{4}$; $\frac{39}{26}$.

9. Wie viele natürliche Teiler hat 180?

10. Emma kann eine Ziffer erraten, ohne die Zahlen, mit denen gerechnet wird zu kennen. Zum Beispiel!
Emma: – Schreib eine natürliche Zahl!
Dan: – (Schreibt 2195)
Emma: – Ändere die Reihenfolge der Ziffern!
Dan: – (Schreibt 9512)
Emma: – Subtrahiere die Zahlen, lösche eine Ziffer und sag mir die Zahl, die bleibt!
Dan: – 737!
Emma: – Du hast die 1 gelöscht!
Wie konnte Emma die gelöschte Ziffer erraten?

11. a) Jede natürliche Zahl kann als Summe von verschiedenen Potenzen von 2 geschrieben werden. Schreibe so die Zahlen 18, 25 und 47.

b) Stimmt es, dass jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Potenzen von 3 geschrieben werden kann?

Wähle aus und löse in 5 Minuten!

A Schreibe 50 als Produkt von Primfaktoren.

B Schreibe $\frac{402}{5}$ zwischen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

C Finde alle natürlichen Zahlen der Form $\overline{2a7b}$, die durch 90 teilbar sind.

Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit rationalen Zahlen. Umkehroperationen.

Problemsituation

Geo hat mithilfe des Laptops und Emma mit dem Handy arithmetische Operationen ausgeführt. Sie haben folgende Tasten gedrückt:

7 – 2 . 5 * 2 =

Obwohl sie auf die gleichen Tasten in derselben Reihenfolge gedrückt haben, waren die Ergebnisse verschieden. Geo erhielt 9 und Emma 2. Haben sie gefehlt, oder ist ein Gerät kaputt?

Die eingegebenen Zahlen sind 7; 2,5 und 2...

...und die Operationen sind die Subtraktion und die Multiplikation

Wir lernen Welches ist die richtige Reihenfolge der arithmetischen Operationen? Welche Verbindungen gibt es zwischen den Operationen?

Wir lösen die Problemsituation!

Der Rechner des Handys arbeitet im wissenschaftlichen Modus, der andere rechnete $7 - 2{,}5 \cdot 2$ und nicht $(7 - 2{,}5) \cdot 2$.

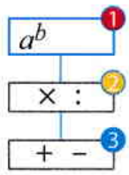
Die Klammern ändern die Priorität im Rechnen!

Wir erinnern uns ...

- **Die Reihenfolge der Rechnungen**

Man berechnet der Reihe nach:

- 1 Potenzen
  2 Multiplikationen oder Divisionen,
  3 Additionen oder Subtraktionen.



$60 - 4^3 \cdot 0{,}5 = 60 - 64 \cdot 0{,}5 = 60 - 32 = 28$

- 1 Die runden Klammern,
  2 Die eckigen Klammern,
  3 Die geschweiften Klammern.

$7 + 2 \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (6 - 5)]\} = 37$

- **Verbindungen zwischen arithmetischen Operationen**

Addition und Subtraktion sind entgegengesetzt.

Beispiel:

$2{,}4 \xrightarrow{+1{,}3} 3{,}7 \xrightarrow{-1{,}3} 2{,}4$

$\frac{1}{2} \xrightarrow{-\frac{2}{3}} -\frac{1}{6} \xrightarrow{+\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$

Multiplikation und Division (mit Faktoren, die nicht null sind) sind umgekehrt.

Beispiel:

$5{,}2 \xrightarrow{\times 1.5} 7{,}8 \xrightarrow{:1{,}5} 5{,}2$

$\frac{2}{5} \xrightarrow{:\frac{2}{3}} \frac{3}{5} \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \frac{2}{5}$

Untersuche die oberen Schemen. Wie funktioniert jedes Schema? **Kritisches und kreatives Denken!**

Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen

Geo hat auf seinem Taschenrechner die im Schema gezeigten Operationen ausgeführt.

$$\boxed{?} \xrightarrow{+3{,}5} \boxed{?} \xrightarrow{\times 0{,}4} \boxed{1{,}88}$$

Seine Kollegen wollen die erste Zahl finden. Ihre Lösungen sind:

Tic: Ich führte die Operationen in umgekehrter Reihenfolge aus!

$$\boxed{1{,}2} \xleftarrow{-3{,}5} \boxed{4{,}7} \xleftarrow{:0{,}4} \boxed{1{,}88}$$

Anna: Ich habe eine Gleichung verwendet.
x ist die erste Zahl. Es gilt:

$$(x+3{,}5)\cdot 0{,}4 = 1{,}88$$
$$x+3{,}5 = 1{,}88 : 0{,}4$$
$$x = 4{,}7 - 3{,}5$$
$$x = 1{,}2$$

Mündliche Übung Warum hat Anna in der Gleichung zum Lösen der Aufgabe Klammern verwendet? Welche Lösung ist interessanter? Warum?

Aufgaben

1. Führe aus:
a) $1{,}4-4{,}58$; $0{,}5\cdot 1{,}3$; $2{,}96:0{,}4$;
b) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$; $\frac{12}{5}\cdot\frac{15}{16}$; $\frac{-1}{6}:\frac{2}{9}$.

2. Berechne: $1{,}(2)+0{,}3(8)$; $2{,}7\cdot 0{,}(3)$; $5{,}(4):0{,}(7)$.

3. Wähle die richtige Antwort! $2{,}5+1{,}5\cdot 3=\ldots$
A. 12; **B.** 6; **C.** 7; **D.** 9.

4. Dan und Emma deuten das Schema

$$\boxed{1{,}5} \xrightarrow{+2} \boxed{?} \xrightarrow{\times 3} \boxed{?}$$

wie folgt: Dan: $(1{,}5+2)\cdot 3=$
Emma: $1{,}5+2\cdot 3=$
Wer hat recht?
Führe beide Rechnungen aus.

5. Der Umfang eines Quadrates ist 7 m. Wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

6. Berechne die Fläche eines quadratischen Displays mit der Seite 2,5 dm.

7. Berechne $(1{,}6+4{,}3)^2$ und $1{,}6^2+4{,}3^2$.
Erkläre, warum die Ergebnisse verschieden sind.

8. Berechne den Umfang und die Fläche der grünen Figur, wenn die Seite des Netzes 0,5 cm ist.

9. Berechne den Umfang und die Fläche des 2,3 m langen und 1,8 m breiten Fensters.

10. Bestimme die kleinste natürliche, von null verschiedene Zahl n, damit $48\cdot n$ ein vollständiges Quadrat ist.

11. Beweise, dass es 100 natürliche aufeinander folgende Zahlen gibt, wobei keine ein vollständiges Quadrat ist.

12. Zeige, dass $2^{308}\cdot 3^{462}$ ein vollständiges Quadrat ist und $2^{491}\cdot 3^{186}$ kein vollständiges Quadrat ist.

13. Verwende einmal die Klammer in der Rechnung $2-2\cdot 3+4:5$, damit das Ergebnis: **a)** positiv; **b)** negativ ist.

14. Die natürliche Zahl P mit n Ziffern, nicht alle gleich, hat folgende Eigenschaft: falls wir die Reihenfolge der Ziffern verändern, erhalten wir die natürliche Zahl Q mit der Eigenschaft: $P+Q=\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ Ziffern}}$.
a) Finde eine solche Zahl P für $n=6$.
b) Zeige, dass die Anzahl n der Ziffern von P eine gerade Zahl ist.

Wähle aus und löse in 5 Minuten!

A Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 1,2 m ist gleich mit dem Umfang eines Quadrates. Welchen Flächeninhalt hat das Quadrat?

B Der Flächeninhalt eines rechteckigen Blechs ist 12 m² und eine seiner Seiten 2,5 m. Berechne seinen Umfang.

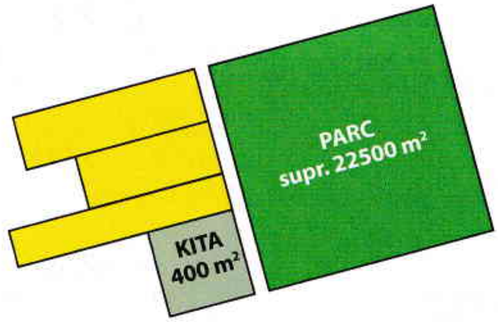
C Berechne:
$1-(1-(1-\ldots-(1-1)\ldots))$
(es sind 100 offene und 100 geschlossene Klammern).

Die Quadratwurzel aus einem vollständigen Quardat

Problemsituation

In Annas Viertel soll auf einer quadratförmigen Fläche von 400 m^2 eine KITA (Kindertagesstätte) gebaut werden. Wie lang ist eine Seite des Grundstückes?

Wir lösen durch probieren:
$10^2 = 100$, und $20^2 = 400$.
Die Seitenlänge ist also 20 m.



Wir lernen! Wie bestimmen wir die Seite eines Quadrates, wenn wir den Flächeninhalt kennen?

Wir vergleichen!

Wodurch gleichen und wodurch unterscheiden sich die folgenden Aufgaben?

A. Der Sportplatz hat die Form eines Quadrates mit der Seite 30 m. Wie groß ist seine Fläche ?

Lösung:
A sei der Flächeninhalt des Sportplatzes.
Dann ist: $A = 30^2 = 900$.
Also die Fläche ist 900 m^2.

B. Eine quadratförmige Fliese hat die Fläche 900 cm^2. Wie lang ist eine Seite der Fliese?

Lösung:
L sei die Seitenlänge der Fliese.
Dann ist: $L^2 = 900$; $L^2 = 30^2$; $L = 30$.
Also ist eine Seite der Fliese 30 cm.

Wir beobachten und definieren!

Die Zahl 30 ist Lösung der Gleichung $L^2 = 30^2$ mit der Unbekannten L. Sie ist ihre einzige *positive* Lösung. Wir sagen 30 ist die Quadratwurzel aus 900.

Bezeichnung:	*Wir lesen:*	*Wir prüfen:*
$\sqrt{900} = 30$	Wurzel aus 900 ist 30.	$30 \geq 0$ und $30^2 = 900$.

Die Quadratwurzel ziehen ist die umgekehrte Operation des Quadrierens.

$$900 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 30 \xrightarrow{\square^2} 900$$

Definition Falls die natürliche Zahl a ein vollständiges Quadrat ist, heißt die natürliche Zahl n, für die $a = n^2$, die Quadratwurzel aus a. Wir schreiben: $n = \sqrt{a}$.

Wir lösen die Problemsituation!

Laut Plan soll in Annas Wohnviertel auch ein quadratischer Park mit einer Fläche von 22 500 m^2 angelegt werden. Wie lang ist eine Seite des Parks?

Lösung:
Laut der oberen Definition ist eine Seitenlänge des Parks $\sqrt{22\,500}$ m. Damit wir diesen Wert bestimmen, zerlegen wir die Zahl 22 500 in Primfaktoren und erkennen ein vollständiges Quadrat: $22\,500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2)^2$. Der gesuchte Wert ist $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 150$. Probe: $150^2 = 22\,500$.

Wir erweitern ...

Kann die Quadratwurzel aus einer Zahl, die keine natürliche Zahl ist gezogen werden?

$\sqrt{2{,}25} = ?$

Wir können so überlegen: Ein quadratisches Grundstück hat die Fläche 2,25 hm^2 = 22 500 m^2.

Die Seitenlänge ist $\sqrt{22\,500} = 150$ (Meter), also 1,5 hm. Folglich: $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Testen der Grundkenntnisse

① Schreibe 36 als Produkt zweier Faktoren:
a) die gleich sind;
b) die verschieden sind.

② $\sqrt{36} = ?$

③ *Wahr oder falsch?* $\sqrt{64} = 32$.

Gelöste Aufgabe

Die Fläche eines quadratischen Bildes ist 49 dm^2. Welches ist die kürzeste Länge der Latten, die für den Bilderrahmen benötigt werden?
Lösung:
Eine Seitenlänge des Bildes ist: $L = \sqrt{49} = 7$ dm.
Die kürzeste Länge der Latten ist der Umfang des Bildes, also $4 \cdot 7$ dm $= 28$ dm.

- Was meinst du, warum verlangt man die *kürzeste* Länge des Rahmens?
- Können wir auf die gleiche Weise vorgehen, wenn das Bild rechteckig ist und seine Fläche bekannt ist?

Wir denken kritisch und konstruktiv!

Aufgaben

1

1. Berechne:
a) $28{,}2 \cdot 2{,}14$; **b)** $2{,}0 \cdot 1{,}24$; **c)** $0{,}13^3$; **d)** $0{,}4^5$;
e) $0{,}1^2$; **f)** $2{,}3^2$; **g)** $1{,}5^2$; **h)** $3{,}2^3$; **i)** $10{,}3^3$.

2. Berechne:
a) $0{,}5 \cdot \frac{4}{5}$; **b)** $2\frac{1}{5} \cdot 0{,}75$; **c)** $1{,}25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{5}$.

3. Welche Zahlen sind vollständige Quadrate? Warum?
$2 \cdot 5$; $3^2 \cdot 5^2$; $2^4 \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$; 100^0; $(7 \cdot 11)^2$.

4. Berechne: $\sqrt{16}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{256}$.

5. Zeige, dass $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 6^3$ ein vollständiges Quadrat ist und berechne dann $\sqrt{a}$.

6. Zerlege in Primfaktoren und berechne die Quadratwurzeln aus den vollständigen Quadraten: 3600; 288; 1250; 1125; 432; 8100; 1764.

7. Welche Sätze sind wahr?
A. $\sqrt{49} = 7$; **B.** $\sqrt{36} = 18$; **C.** $\sqrt{25} = -5$; **D.** $\sqrt{1} = 0$.

2

8. Berechne:
a) $5 - 0{,}5^3$; **b)** $5^3 - 0{,}5$; **c)** $5 + 0{,}5^3$;
d) $0{,}5^3 \cdot 5$; **e)** $5^3 \cdot 0{,}5$; **f)** $0{,}5^3 + 5^3$;
g) $5^3 \cdot 0{,}5^3$; **h)** $5^3 - 0{,}5^3$.

9. Finde die Fläche der roten Figur, wenn die Seite des Rasters 0,5 cm ist.

10. Die Seite einer quadratischen Fliese ist 15 cm. Welche Fläche hat die Fliese?

11. Der Umfang eines quadratischen Teppichs ist 18 m. Welche Fläche hat der Teppich?

12. Ein quadratischer Garten hat die Fläche von 1600 ha. Wie lang ist der Zaun, der den Garten umgibt?

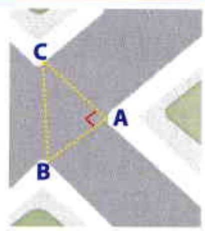
3

13. Berechne mit zwei genauen Dezimalstellen:
a) $70 : 19$; **b)** $15{,}26 : 13$; **c)** $57{,}8 : 9$;
d) $0{,}45 : 0{,}7$; **e)** $0{,}03 : 0{,}5$; **f)** $106{,}6 : 1{,}7$.

14. Die Dimensionen eines Rechtecks sind 12 m und 75 m. Berechne die Seite des Quadrates mit gleicher Fläche wie das Rechteck.

15. Die Seitenlängen eines Dreiecks sind 10 m, 10 m und 12 m. Berechne seine Fläche.

16. In der Straßenkreuzung im Bild sind $AB = 12$ m, $AC = 16$ m, $AB \perp AC$.
Berechne BC.



17. **a)** Zeige, dass $a \cdot 0{,}25 = a : 4$;
b) Führe auf die einfachste Art aus: $120 \cdot 0{,}25$; $0{,}25 \cdot 3600$; $4{,}12 \cdot 0{,}25$; $9{,}6 \cdot 0{,}25$.

4

18. Berechne die Quadratwurzel aus der Zahl $N = 1 + 2 + 3 + ... + 288$.

19. **a)** Zeige, nachdem du rechnest, dass $44 - 8$ und $4444 - 88$ vollständige Quadrate sind.
b) Berechne: $\sqrt{444444 - 888}$.

Wähle aus und löse in 5 Minuten!

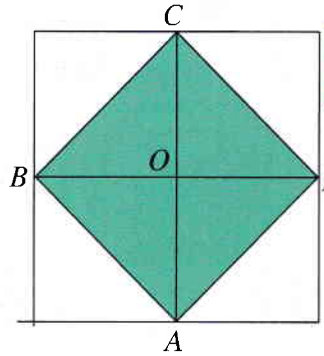
A Berechne: $\sqrt{36}$ und $\sqrt{81}$.

B Berechne $\sqrt{144}$ und $\sqrt{2500}$.

C Bestimme die Ziffern a und b wenn $\sqrt{\overline{3ab}} = 19$.

Schätzen der Quadratwurzel aus einer Zahl

Problemsituation



Tic hat die grüne Figur $ABCD$ aus der Abbildung in ein quadratisches Raster mit der Kästchenlänge 1 cm gezeichnet. Er faltete dann die weißen Ecken auf die grüne Fläche und bemerkte, dass diese genau bedeckt wird. Deshalb schlussfolgerte er, dass $ABCD$ ein Quadrat mit der Fläche 2 cm^2 ist. Wie lang ist eine Seite?

Dass $ABCD$ ein Quadrat ist, stimmt, weil die rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke BOC, COD, DOA und AOB kongruent sind. Also ist $AB = \sqrt{2}$ cm.

Aber 2 ist kein vollständiges Quadrat! Was bedeutet $\sqrt{2}$? Da $\sqrt{2}$ die Länge der Strecke AB ist, ist $\sqrt{2}$ eine Zahl!

Ich könnte die Seite des Quadrates $ABCD$ abmessen, aber die Messung ist ungenau! (in mm, in Zehntel mm?)

Wir lernen! Wie approximieren wir die Quadratwurzel aus einer Zahl die keine Quadratzahl ist?

Wir analysieren!

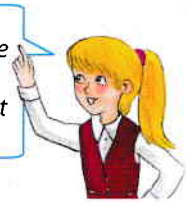
In der oberen Abbildung ist die Fläche des Quadrates $ABCD$ 2 cm^2. Wir können behaupten, dass die Länge der Seite AB folgende Eigenschaften hat:

- $AB > AO$ (die Hypotenuse ist länger als jede Kathete), also ist $AB > 1$ cm;
- $AB < AO + OB$ (eine Seite eines Dreiecks ist kürzer als die Summe der anderen beiden), also $AB < 2$ cm.

Daraus folgt, dass $\sqrt{2}$ eine Zahl zwischen 1 und 2 ist. Also $1 < \sqrt{2} < 2$.

Definition Falls a eine positive Zahl ist, heißt die positive Zahl b, für die $a = b^2$ die Quadratwurzel aus a. Wir schreiben: $b = \sqrt{a}$. Die Zahl $\sqrt{a}$ ist die einzige positive Zahl, deren Quadrat gleich a ist.

Also ist $\sqrt{5}$ die positive Zahl, deren Quadrat 5 ist.



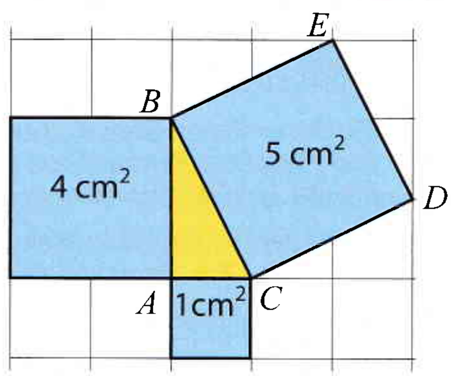
Wir erinnern uns...

Wir wissen, dass die Fläche des Quadrates, das man an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, gleich ist mit der Summe der Flächen der Quadrate an den Katheten.

Die Fläche des Quadrates $BCDE$ aus der Figur nebenan ist 5 cm^2; deshalb ist die Länge der Strecke BC $\sqrt{5}$ cm.

Da $AB < BC < AB + AC$, ist $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 3.

$2 < \sqrt{5} < 3$.



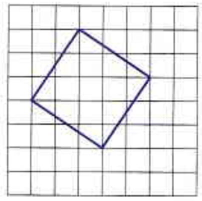
Testen der Grundkenntnisse

① Berechne die Seitenlänge des Quadrates mit der Fläche: **a)** 25 cm^2; **b)** 100 cm^2; **c)** 5 cm^2; **d)** 17 cm^2.

② Ordne $\sqrt{6}$ zwischen zwei: **a)** beliebige natürliche Zahlen; **b)** aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ein.

③ Es gilt $4 + 9 = 13$. Zeichne Quadrate mit den Flächeninhalten 4 und 9 an den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und ordne dann $\sqrt{13}$ zwischen zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ein.

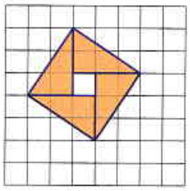
Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen



Die Schüler sollten die Seitenlänge des rechts dargestellten Quadrates berechnen. Die Seite eines Rasterquadrates ist 1 cm. Ihre Lösungen sind:

Tic: Ich berechne zuerst den Flächeninhalt durch Zerlegen der Fläche.

Die 4 bunten rechtwinkligen Dreiecke in der Figur werden so neu angeordnet, dass ein Rechteck mit der Fläche 12 cm^2 entsteht. In der Mitte entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm.



Der Flächeninhalt des Quadrates ist 13 cm^2. Also seine Seite ist $\sqrt{13}$ cm.

Lisa: Laut Lehrsatz von Pythagoras, gilt im rechtwinkligen Dreieck AOB:

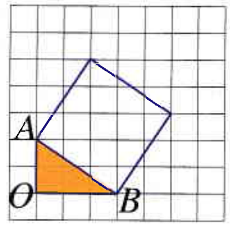
$AB^2 = AO^2 + OB^2$,

$AO = 2$ cm und $OB = 3$ cm.

Also: $AB^2 = 2^2 + 3^2$

$AB^2 = 13$.

Folglich ist $AB = \sqrt{13}$ cm.



Kritisches und kreatives Denken

① Welche anderen rechtwinkligen Dreiecke könnte Lisa zum Berechnen der Seite des Quadrates verwenden?

② Rahme das ursprüngliche Quadrat in ein Quadrat ein, dessen Seiten horizontal und vertikal liegen. Verwende diese Figur um die obere Aufgabe zu lösen.

Aufgaben

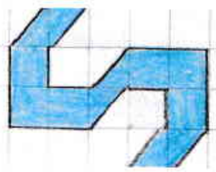
1. Welche Aussagen sind richtig?

a) $\sqrt{6} = 3$; **b)** $\sqrt{25} = 5$; **c)** $\sqrt{3} \geq 1$; **d)** $\sqrt{7} \leq 2$.

2. Wähle die richtige Antwort aus! $\left(\sqrt{6}\right)^2 =$

A. 36; **B.** 3; **C.** 12; **D.** 6; **E.** $\sqrt{6}$.

3. Approximiere den Umfang der blauen Figur mit ganzen Millimetern, wenn die Seite eines Kästchens im Raster 5 mm lang ist.

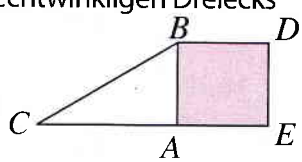


4. Berechne die Seite eines quadratischen Etiketts mit gleichem Flächeninhalt wie ein rechteckiges mit Seiten von 6 cm und 2 cm.

5. Welche Fläche hat ein Quadrat mit der Seite $\sqrt{7}$ cm?

6. Zeichne ins Matheheft (ein Kästchen hat die Seite 5 mm) ein Quadrat mit dem Flächeninhalt: **a)** 9 cm^2; **b)** 8 cm^2; **c)** 10 cm^2. Welches Quadrat hat die längste Seite? Warum?

7. An der Kathete AB des rechtwinkligen Dreiecks ABC sei das Quadrat $ABDE$ gezeichnet. Wenn $AC = 3$cm und $BC = 4$cm, berechne:



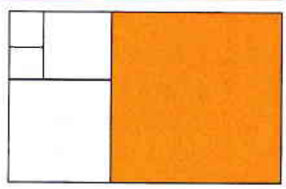
a) die Fläche von $ABDE$;

b) die Länge der Strecke BD.

8. Dan steht genau im Zentrum eines quadratischen Hofes von 18 Ar. Wie viel Meter sind von Dan zu jeder Ecke des Hofes?

9. Anna hat drei quadratische Kartons mit den Seiten 4 dm, 6 dm und 9 dm in Stücke zerschnitten und danach als quadratisches Puzzle zusammengestellt. Welche Seitenlänge hat Annas Puzzle?

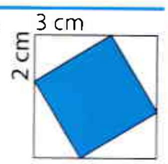
10. Die in der Abbildung dargestellte Figur wurde nach einer bestimmten Regel aus 5 Quadraten erzeugt. **a)** Berechne die Seitenlänge eines jeden Quadrates, wenn die Fläche des bunten Quadrates 50 cm^2 ist. **b)** Übertrage die Zeichnung in dein Heft und füge, mit derselben Regel, ein neues Quadrat hinzu. Wie lang ist die Seite des neuen Quadrates?



Wähle aus und löse in 5 Minuten!

A Schreibe alle Zahlen der unteren Liste, die zwischen 4 und 5 liegen, ins Heft: 3,45; 4,5; $\sqrt{7}$; 4,(5); $\sqrt{18}$; $-4{,}5$; $\sqrt{20{,}25}$.

B Berechne die Seitenlänge des bunten Quadrates.



C Die Ecken des Quadrates mit $l = 10$cm werden mit den Mitten der Gegenseiten verbunden. Berechne l_1.